

因数分解の工夫

教科書P17~20

C 因数分解の工夫

複雑な式を因数分解するとき、式の一部を1つのまとまりとみるなど、式の形の特徴に着目すると、因数分解の公式を利用できることがある。

例題 次の式を因数分解せよ。

5 (1) $(x+y)^2+2(x+y)-15$ (2) x^4-3x^2-4 中学のとき

解答 (1) $(x+y)^2+2(x+y)-15$
 $= \{(x+y)-3\}\{(x+y)+5\}$
 $= (x+y-3)(x+y+5)$

$A^2+2A-15$
 $= (A-3)(A+5)$

Aとおいても良いが
 "慣れたらおかない方が"
 早い。

(2) $x^4-3x^2-4 = (x^2+1)(x^2-4)$
 $= (x^2+1)(x+2)(x-2)$

$\leftarrow x^2=A$ とおくと
 A^2-3A-4

練習 21 次の式を因数分解せよ。

- (1) $(x-y)^2-5(x-y)+6$ (2) $2(x+3y)^2-(x+3y)-1$
 (3) $(x+y)^2-9$ (4) $x^2-(y-1)^2$
 (5) x^4-8x^2-9 (6) x^4-16

応用例題 1 次の式を因数分解せよ。

$$x^2+xy+x+2y-2$$

考え方 ▶ この式は、 x については2次式、 y については1次式であるから、次数の低い方の文字 y について整理する。

少ない文字で
 <<るとよい

解答 $x^2+xy+x+2y-2 = (x+2)y + (x^2+x-2)$ ↓ 因数分解
 $= (x+2)y + (x+2)(x-1)$ (x+2)を<<る
 $= (x+2)\{y+(x-1)\}$
 $= (x+2)(x+y-1)$

$A = x+2$ とおくと
 (2行目) $= Ay + A(x-1)$
 $= A\{y+(x-1)\}$

練習 22 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2+xy-4x-y+3$ (2) $x^2+ax-3a-9$

文字が式の中に2種類以上あるときは、このように(次数の)少ない文字で<<ると、共通因数が現れる。

もし、少ない文字がなかったら(全文字が同じ次数だったら)次のA°-ジ

5

10

15

20

応用
例題
2

次の式を因数分解せよ。

$$2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2$$

考え方 ▶ この式は、 x についても y についても2次式であるから、たとえば x について降べきの順に整理する。定数項にあたる y の2次式を因数分解し、16ページの因数分解の公式4を利用する。

x (y もよい) の
高い項から順に並べる

解答

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 5y - 2 \\ &= 2x^2 + (5y-3)x + (3y^2-5y-2) \\ &= 2x^2 + (5y-3)x + (y-2)(3y+1) \\ &= (x+(y-2))(2x+(3y+1)) \\ &= (x+y-2)(2x+3y+1) \end{aligned}$$

$3y^2 - 5y - 2$
 $\begin{matrix} 3 & \times & 1 & \rightarrow & -6 \\ 1 & & -2 & \rightarrow & -2 \\ & & & & -5 \end{matrix}$

式全体をみて「=」でかきつけ
 $2x^2 + (5y-3)x + (y-2)(3y+1)$
 $\begin{matrix} 1 & \times & (y-2) & \rightarrow & 2y-4 \\ 2 & & (3y+1) & \rightarrow & 3y+1 \\ & & & & 5y-3 \end{matrix}$
 $= \{ x + (y-2) \} \{ 2x + (3y+1) \}$

練習
23

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1$ (2) $3x^2 - 5ax + 2a^2 - 3x + a - 6$

応用
例題
3

次の式を因数分解せよ。

$$a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$$

考え方 ▶ この式は、 a, b, c のどの文字についても2次式であるから、たとえば a について降べきの順に整理する。

a (b や c もよい) の
高い順に並べる

解答

$$\begin{aligned} & a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \\ &= (-b+c)a^2 + (b^2 - c^2)a + (bc^2 - b^2c) \\ &= -(b-c)a^2 + (b+c)(b-c)a - bc(b-c) \\ &= -(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\ &= -(b-c)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

$(b-c)$ が共通因数

例えは
 $x^2 - 6x + 8$
 $\begin{matrix} 1 & \times & -6 \\ 2 & & 4 \end{matrix}$
 $= x^2 - (2+4)x + 2 \times 4$
 $= (x-2)(x-4)$ と同様
 $\left[\begin{aligned} & a^2 - (b+c)a + bc \\ &= (a-b)(a-c) \end{aligned} \right]$

練習
24

次の式を因数分解せよ。

$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$$

式の中の全ての種類の文字が同じ次数
 だったら ある1つの文字が降べきの順に並べて
 整理 (教P8 例5) すると、共通因数が現れる。

<展開の公式>

全部覚えるぞ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

④ には載ってないけど!! 1L-1Lが分かる? 5乗以上も公式アリ

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

これはあとで習います

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

<因数分解の公式>

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

これを覚えて代入するぞ!! 教科書p19,20が解けます。