数学Ⅰ ★★ 数と式 ★★

1 (1) $(6x^3-3x-4)+(5+8x^2+2x-x^3)+2(x-4x^2-3)$

$=6x^3-3x-4+5+8x^2+2x-x^3+2x-8x^2-6$

$=(6-1)x^3+(8-8)x^2+(-3+2+2)x+(-4+5-6)$

$=5x^3+x-5$

(2) $(7x^3-4x-5)+x(3x+6-2x^2)-3x(2x^2-x+4)$

$=7x^3-4x-5+3x^2+6x-2x^3-6x^3+3x^2-12x$

$=(7-2-6)x^3+(3+3)x^2+(-4+6-12)x-5$

$=-x^3+6x^2-10x-5$

2 (1) $(2m+5)(m-2)=2m^2+\{2\cdot(-2)+5\cdot1\}m+5\cdot(-2)=2m^2+m-10$

(2) $(6a-5b)(6a+5b)=(6a)^2-(5b)^2=36a^2-25b^2$

(3) $(3-2x)(1+x)=3+3x-2x-2x^2=-2x^2+x+3$

(4) $(x-a+1)^2=\{(x-a)+1\}^2$

$=(x-a)^2+2(x-a)+1^2$

$=x^2-2ax+a^2+2x-2a+1$

(5) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^4+4x^2+4)-4x^2=x^4+4$

(6) $(x+y-z)(x-y+z)=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}$

$=x^2-(y-z)^2$

$=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-y^2+2yz-z^2$

(7) $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)=(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)=(x^4+1)(x^4-1)$

$=x^8-1$

(8) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$

(9) $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)=(x+4)(x-3)\times(x+2)(x-1)$

$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)$

$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$

$=x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$

$=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$

3 (1) $2ax^2-8a=2a(x^2-4)=2a(x+2)(x-2)$

(2) $ax^2+by^2-ay^2-bx^2=(a-b)x^2+(b-a)y^2$

$=(a-b)x^2-(a-b)y^2$

$=(a-b)(x^2-y^2)$

$=(a-b)(x+y)(x-y)$

(3) $(x-4)(3x+1)+10=3x^2-11x-4+10$

$=3x^2-11x+6$

$=(x-3)(3x-2)$

(4) $2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$

4 (1) $4x^2-y^2+2y-1=4x^2-(y^2-2y+1)=(2x)^2-(y-1)^2$

$=\{2x+(y-1)\}\{2x-(y-1)\}$

$=(2x+y-1)(2x-y+1)$

(2) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

(3) $x^3+ax^2-x^2-a=(x^2-1)a+x^3-x^2$

$=(x+1)(x-1)a+x^2(x-1)$

$=(x-1)\{(x+1)a+x^2\}$

$=(x-1)(x^2+ax+a)$

(4) $6x^2+7xy+2y^2+x-2=2y^2+7xy+(6x^2+x-2)$

$=2y^2+7xy+(2x-1)(3x+2)$

$=\{y+(2x-1)\}\{2y+(3x+2)\}$

$=(2x+y-1)(3x+2y+2)$

(5) $3x^2+2xy-y^2+7x+3y+4=3x^2+(2y+7)x-(y^2-3y-4)$

$=3x^2+(2y+7)x-(y+1)(y-4)$

$=\{x+(y+1)\}\{3x-(y-4)\}$

$=(x+y+1)(3x-y+4)$

(6) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc$

$=(b+c)a^2+abc+(b+c)\{(b+c)a+bc\}-abc$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

5 $A+B=(x^2-1)a+x^2-2x+1$

$=(x+1)(x-1)a+(x-1)^2$

$=(x-1)\{(x+1)a+(x-1)\}$

$=(x-1)\{(a+1)x+a-1\}$

A，B をそれぞれ a について整理すると

$AB=\{-a+(x^2-3x)\}\{x^2a+(x+1)\}$

a の 1 次の項の係数は

$-(x+1)+(x^2-3x)x^2=x^4-3x^3-x-1$

答 (ア) 1 (イ) 1 (ウ) 1 (エ) 3 (オ) 1

6 (1) $|0-3|-|0+2|=|-3|-|2|=3-2=1$

(2) $|5-3|-|5+2|=|2|-|7|=2-7=-5$

(3) $|-4-3|-|-4+2|=|-7|-|-2|=7-2=5$

7 (1) $x=3$ のとき

$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(3+1)^2}=\sqrt{4^2}=4$

(2) $x=-1$ のとき

$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(-1+1)^2}=\sqrt{0}=0$

(3) $x=-3$ のとき

$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{(-3+1)^2}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

別解 $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

(1) $x=3$ のとき $|x+1|=|3+1|=|4|=4$

(2) $x=-1$ のとき $|x+1|=|-1+1|=|0|=0$

(3) $x=-3$ のとき $|x+1|=|-3+1|=|-2|=2$

8 (1) $2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}=2\cdot3\sqrt{3}-3\cdot2\sqrt{3}+3\sqrt{6}$

$=6\sqrt{3}-6\sqrt{3}+3\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$

$=3+2\cdot3\sqrt{2}+6$

$=9+6\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\cdot2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=2\cdot3+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+2$

$=8+3\sqrt{6}$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-2}=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

(6) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1.4142}{2}=0.7071$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2}=2+\sqrt{2}$

$=2+1.4142=3.4142$

10 $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}$

$y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$

$x+y=(4-\sqrt{15})+(4+\sqrt{15})=8$

$xy=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=1$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot1=62$

(2) $x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=1\cdot62=62$

(3) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{62}{1}=62$

11 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから $2<\sqrt{3}+1<3$

よって $a=2$，$b=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$

答 (ア) 3 (イ) 1 (ウ) 2 (エ) 3 (オ) 1

12 (1) 不等式を整理すると $-3x<-12$

よって $x>4$

(2) 両辺に 6 を掛けると $2x+3(10-x)\geqq24$

不等式を整理すると $-x\geqq-6$

よって $x\leqq6$

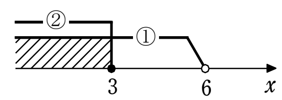
(3) $2x+6>5x-12$ から $-3x>-18$

よって $x<6$ ……①

$3x-7\leqq2(4-x)$ から $5x\leqq15$

よって $x\leqq3$ ……②

①と②の共通範囲を求めて $x\leqq3$



(4) 各辺に 100 を掛けると

$$100\times0.05\leqq100\left(0.2-\frac{x}{100}\right)\leqq100\times0.1$$

すなわち $5\leqq20-x\leqq10$

各辺から 20 を引くと $-15\leqq-x\leqq-10$

各辺に -1 を掛けると $15\geqq x\geqq10$

よって $10\leqq x\leqq15$

13 $x+a \geqq 3x+5$ より　　$x \leqq \dfrac{a-5}{2}$

$\dfrac{a-5}{2}=3$ より　　　$a=11$

14 大きい数を x とすると，小さい数は $40-x$ である。

$$\frac{1}{4}x<40-x<x \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} \frac{1}{4}x<40-x & \cdots\cdots ① \\ 40-x<x & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① の両辺に 4 を掛けると　　$x<160-4x$

すなわち　$5x<160$

よって　　$x<32$　……③

② から　　$-2x<-40$

よって　　$x>20$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて　　$20<x<32$

よって，大きい数は 20 より大きく 32 より小さい。

15 (1)　$|x-3|=5$ から　　$x-3=\pm 5$

よって　　　　　$x=8,\ -2$

(2)　$|x+4| \geqq 1$ から　　$x+4 \leqq -1,\ 1 \leqq x+4$

すなわち　　　　$x \leqq -5,\ -3 \leqq x$

(3)　$|2x-1|<7$ から　　$-7<2x-1<7$

$-6<2x<8$

よって　　　　　$-3<x<4$

(4)　$|3x+5| \geqq 2$ から　　$3x+5 \leqq -2,\ 2 \leqq 3x+5$

すなわち　　　　$3x \leqq -7,\ -3 \leqq 3x$

よって　　　　　$x \leqq -\dfrac{7}{3},\ -1 \leqq x$

16 (1)　[1]　$2x-4 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 2$ のとき

方程式は　$2x-4=x+1$

よって　　$x=5$　　これは，$x \geqq 2$ を満たす。

[2]　$2x-4<0$ すなわち $x<2$ のとき

方程式は　$-(2x-4)=x+1$

よって　　$x=1$　　これは，$x<2$ を満たす。

[1], [2] から，求める解は　$x=1,\ 5$

(2)　[1]　$x \geqq 2$ のとき

不等式は　$2x-4>x+1$

よって　　$x>5$

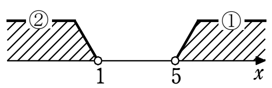
これと $x \geqq 2$ との共通範囲は　$x>5$　……①

[2]　$x<2$ のとき

不等式は　$-(2x-4)>x+1$

よって　　$x<1$

これと $x<2$ との共通範囲は　$x<1$　……②



求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x<1,\ 5<x$

17 $\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$ であるから　　$3<\sqrt{13}<4$

これより　　$\dfrac{5+3}{2}<\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<\dfrac{5+4}{2}$　すなわち　$4<\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<\dfrac{9}{2}$

よって　　$a=4$

答　(ア)　3　　(イ)　4　　(ウ)　4　　(エ)　9　　(オ)　2　　(カ)　4

数学Ⅰ ★★ 集合と命題 ★★

1 (1)　$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

よって　　$A \cap B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，　$A \cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 16\}$

(2)　$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，$B=\{-1,\ 1,\ 3\}$

よって　　$A \cap B=\{-1,\ 1\}$，　$A \cup B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

2 (1)　$A \cap B=\{3,\ 5\}$

(2)　$\overline{A} \cup \overline{B}=\overline{A \cap B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

(3)　$\overline{A \cup B}=\{4,\ 6,\ 7,\ 9\}$

(4)　$A \cap \overline{B}=\{2,\ 8\}$

3 対偶「a，b はともに有理数 $\Longrightarrow$ $a+b$ は有理数」は真である。

よって，もとの命題も真である。

4 (1)　(ア)　①　　(2)　(イ)　②　　(3)　(ウ)　⓪

数学Ⅰ ★★ データの分析 ★★

1 (1)　1 回目のデータの平均値は

$$\frac{1}{10}(1+1+2+4+7+8+8+9+10+10)=\frac{1}{10}\times 60=6 \text{ (点)}$$

(2)　1 回目のデータを値の小さい方から順に並べたとき

5 番目の値は　7

6 番目の値は　8

である。よって，1 回目のデータの中央値は

$$\frac{7+8}{2}=\frac{15}{2}=7.5 \text{ (点)}$$

(3)　1 回目のデータの平均値は，(1) より　6 (点)

2 回目のデータの平均値は

$$\frac{1}{10}(2+3+4+4+5+5+6+6+7+8)=\frac{1}{10}\times 50=5 \text{ (点)}$$

1 回目のデータを x，2 回目のデータを y とする。

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$
	1	2	-5	-3	15	25	9
	1	4	-5	-1	5	25	1
	2	3	-4	-2	8	16	4
	4	5	-2	0	0	4	0
	7	4	1	-1	-1	1	1
	8	5	2	0	0	4	0
	8	6	2	1	2	4	1
	9	7	3	2	6	9	4
	10	6	4	1	4	16	1
	10	8	4	3	12	16	9
計	60	50			51	120	30

上の表から，相関係数は

$$\frac{51}{\sqrt{120\times 30}}=\frac{51}{60}=0.85$$

2 $\dfrac{1}{5}(2+3+a+8+12)=6$ より　　$a+25=30$

よって　　$a=5$

データ x の値と偏差の 2 乗の値は，次の表のようになる。

x	2	3	5	8	12	計 30
$(x-\overline{x})^2$	16	9	1	4	36	計 66

したがって，分散は　　$\dfrac{1}{5}\times 66=13.2$

別解　(分散の求め方)

x	2	3	5	8	12	計 30
x^2	4	9	25	64	144	計 246

よって，分散は　　$\overline{x^2}-(\overline{x})^2=\dfrac{246}{5}-6^2=13.2$

3 (1)　B のテストの中央値が 80 点より大きいから，B のテストでは，半数以上の生徒が 80 点以上であったといえる。

よって，条件を満たすテストは　B

(2)　40 点以下の生徒がいたテストは A，C，D の 3 つ。

このうち，A は箱の下端，すなわち第 1 四分位数が 40 点より小さいから，

$\dfrac{1}{4}$ 以上，すなわち，75 人以上の生徒が 40 点以下であるといえる。

また，C については，中央値や第 3 四分位数が 40 点より小さいから，これも 75 人以上の生徒が 40 点以下であるといえる。

D は第 1 四分位数が 40 点より大きいから，40 点以下の生徒は 75 人未満であるといえる。

よって，条件を満たすテストは　D

答　(1)　(ア)　①　　(2)　(イ)　③

数学A ★★ 図形の性質★★

1 中点連結定理により

CB∥QR，CA∥PR，AB∥QP

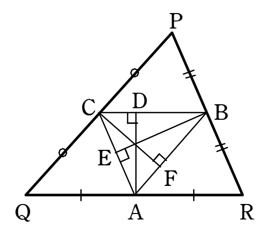
△ABC において，点 A から辺 BC に下ろした垂線を AD とすると，CB∥QR から

AD⊥QR

よって，直線 AD は辺 QR の垂直二等分線である。

同様に，△ABC において，点 B，C からその向かい合う辺に下ろした垂線を，それぞれ BE，CF とすると

BE⊥RP，CF⊥PQ



したがって，△ABC の各頂点からその向かい合う辺に下ろした 3 本の垂線は，△PQR の各辺の垂直二等分線と一致し，△PQR の外心で交わる。

2 P は，∠B の外角，∠C の外角の二等分線上の点であるから

PF＝PD，PD＝PE

よって　　PF＝PE

したがって，P は ∠A の二等分線上にある。

$\boxed{3}$ (1) △ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1 \quad すなわち \quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=1$$

BD＝DC より，点 D は辺 BC の中点である。

よって，3 本の中線 AD，BF，CE は 1 点 G で交わる。

(2) △ABD と 直線 EC にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DG}{GA}\cdot\frac{AE}{EB}=1 \quad すなわち \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{DG}{GA}\cdot\frac{1}{1}=1$$

$\frac{DG}{GA}=\frac{1}{2}$ より　　AG : GD＝2 : 1

$\boxed{4}$ (1) ∠ABC＝∠ADP＝58°

∠BAD＝25°＋58°＝83° であるから

$$\alpha=180°-(58°+83°)=39°$$

(2) ∠ACB＝180°−(64°＋42°)＝74°

∠PAB＝∠ACB，∠PBA＝∠ACB であるから

$$\alpha=180°-(74°+74°)=32°$$

$\boxed{5}$ 四角形 ACQP は円に内接するから

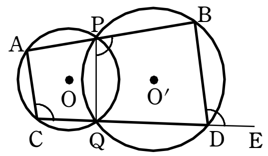
∠ACQ＝∠BPQ

また，四角形 PQDB も円に内接するから，右の図のように，∠BDQ の外角を ∠BDE とすると

∠BPQ＝∠BDE

よって　　∠ACQ＝∠BDE

同位角が等しいから　　AC∥BD



$\boxed{6}$ 右の図のように，点 P における 2 つの円の共通接線を EF とする。

円の接線と弦の作る角の性質により

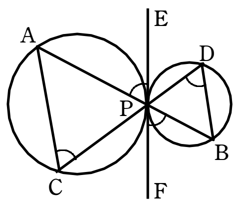
∠EPA＝∠ACP

∠FPB＝∠BDP

∠EPA＝∠FPB であるから

∠ACP＝∠BDP

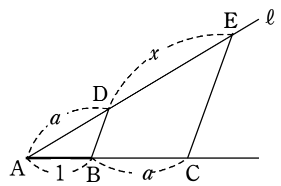
錯角が等しいから　　AC∥DB



$\boxed{7}$ ①　点 A を通り，直線 AB と異なる半直線 ℓ を引く。

②　線分 AB の B を越える延長上に BC＝a となるように点 C をとり，ℓ 上に AD＝a となるように点 D をとる。

③　C を通り，直線 BD に平行な直線を引き，ℓ との交点を E とする。線分 DE が求める線分である。



DE＝x とすると，BD∥CE から

$1 : a=a : x$　すなわち　$x=a^2$

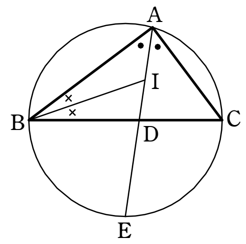
よって，線分 DE は長さ a^2 の線分である。

$\boxed{8}$ (1) AD は∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC＝4 : 3

よって

$$BD=\frac{4}{4+3}BC=\frac{4}{7}\times5=\frac{20}{7}$$



(2) BI は ∠B の二等分線であるから

$$AI : ID=BA : BD=4 : \frac{20}{7}=7 : 5$$

(3) (1) より，$BD=\frac{20}{7}$ であるから

$$DC=5-\frac{20}{7}=\frac{15}{7}$$

方べきの定理により

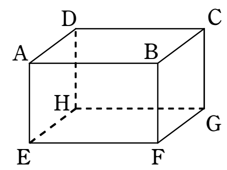
$$AD\cdot DE=BD\cdot DC=\frac{20}{7}\cdot\frac{15}{7}=\frac{300}{49}$$

答（ア）4　（イ）3　（ウ）2　（エ）0　（オ）7　（カ）7　（キ）5

（ク）3　（ケ）0　（コ）0

$\boxed{9}$ (1) 正しくない。

右の図の直方体 ABCD−EFGH において，AB∥DC で，直線 DC と直線 GC は交わるが，直線 AB と直線 GC はねじれの位置にあり，交わらない。



(2) 正しい。　　(3) 正しい。

$\boxed{10}$ (1) OA⊥OB，OA⊥OC であるから，OA は平面 OBC に垂直である。

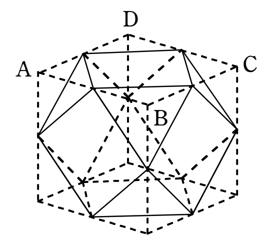
よって　OA⊥BC　また，OH は平面 ABC に垂直であるから　　OH⊥BC

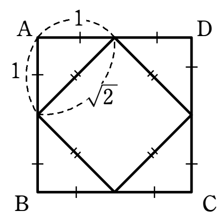
(2) (1) より，OA⊥BC，OH⊥BC であるから BC は平面 AOH に垂直である。

よって　　AH⊥BC

$\boxed{11}$ もとの立方体の 1 辺の長さが 2 であるから，かどを切り取ってできた多面体の 1 辺の長さは $\sqrt{2}$ である。

かどを切り取ってできた多面体は，正方形が 6 つ，正三角形が 8 つでできている。





よって，この多面体の表面積は

$$(\sqrt{2})^2\times6+\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\times8=12+4\sqrt{3}$$

切り取った三角錐 1 つの体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot1=\frac{1}{6}$$

求める多面体の体積は，もとの立方体から 8 つの三角錐の体積を引いた値であるから

$$2^3-\frac{1}{6}\times8=\frac{20}{3}$$

$\boxed{12}$ (1) この多面体の 1 つの頂点に集まる面の数は 3 である。

(2) 1 つの頂点に 3 つの面が集まっているから，求める頂点の数は

$$(12\times5+20\times6)\div3=60$$

1 つの辺に 2 つの面が集まっているから，求める辺の数は

$$(12\times5+20\times6)\div2=90$$

答（ア）3　（イ）6　（ウ）0　（エ）9　（オ）0

別解 (2) 頂点の数は，正五角形の頂点の総数に等しいから

$$12\times5=60$$

辺の数を e とすると，オイラーの多面体定理により

$$60-e+(12+20)=2$$

よって　　$e=90$

数学A ★★ 整数の性質★★

$\boxed{1}$ (1) 自然数 N は，下 2 桁を a とすると，負でない整数 k を用いて

$$N=100k+a$$

と表される。ここで，$100k=4\cdot25\cdot k$ であるから，$100k$ は 4 の倍数である。

よって，N が 4 の倍数であるのは，a すなわち下 2 桁が 4 の倍数のときである。

(2) 自然数 N は，下 3 桁を b とすると，負でない整数 k を用いて

$$N=1000k+b$$

と表される。ここで，$1000k=8\cdot125\cdot k$ であるから，$1000k$ は 8 の倍数である。

よって，N が 8 の倍数であるのは，b すなわち下 3 桁が 8 の倍数のときである。

$\boxed{2}$ 84，210，378 を素因数分解すると

$$84=2^2\cdot3\cdot7$$

$$210=2\cdot3\cdot5\cdot7$$

$$378=2\cdot3^3\cdot7$$

最大公約数は　$2\cdot3\cdot7=42$，最小公倍数は　$2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7=3780$

$\boxed{3}$ 24，360 を素因数分解すると　　$24=2^3\cdot3$，$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

よって，24 との最小公倍数が 360 である正の整数は

$2^a\cdot3^2\cdot5$　　$(a=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

で表される。したがって，求める整数は

$n=2^0\cdot3^2\cdot5,\ 2^1\cdot3^2\cdot5,\ 2^2\cdot3^2\cdot5,\ 2^3\cdot3^2\cdot5$

すなわち　　$n=45,\ 90,\ 180,\ 360$

$\boxed{4}$ a，b は，整数 k，l を用いて

$$a=8k+3,\quad b=8l+2$$

と表される。

(1) $a-b=(8k+3)-(8l+2)=8(k-l)+1$

よって，$a-b$ を 8 で割ったときの余りは 1 である。

(2) $3a+5b=3(8k+3)+5(8l+2)=8(3k+5l+2)+3$

よって，$3a+5b$ を 8 で割ったときの余りは 3 である。

(3) $a^2-b^2=(8k+3)^2-(8l+2)^2=8^2k^2+2\cdot8k\cdot3+3^2-(8^2l^2+2\cdot8l\cdot2+2^2)$

$=8(8k^2+6k-8l^2-4l)+5$

よって，a^2-b^2 を 8 で割ったときの余りは 5 である。

$\boxed{5}$ 連続する 2 つの偶数は，整数 k を用いて $2k$，$2k+2$ と表される。

$$(2k+2)^2-(2k)^2=(4k^2+8k+4)-4k^2=4(2k+1)$$

$2k+1$ は奇数であるから，$4(2k+1)$ は 4 の倍数であるが 8 の倍数ではない。

よって，連続する 2 つの偶数の 2 乗の差は，4 の倍数であるが，8 の倍数でない。

6 すべての整数は，整数 k を用いて，$5k$，$5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ のいずれかの形に表される。

[1] $n=5k$ のとき
$$n^2=(5k)^2=5\cdot 5k^2$$
[2] $n=5k+1$ のとき
$$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$$
[3] $n=5k+2$ のとき
$$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$$
[4] $n=5k+3$ のとき
$$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$$
[5] $n=5k+4$ のとき
$$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$$
よって，n^2 を 5 で割ったときの余りは，0，1，4 のいずれかである。

7 (1) 素数 p を用いて p^5 で表される数は，正の約数が 6 個である。

$2^5=32$，$3^5=243$ であるから，p^5 が 40 以下となる p は，$p=2$ である。

(2) 2 つの異なる素数 p，q を用いて $p\cdot q^2$ で表される数の正の約数は

$(1+1)(2+1)=6$ (個) である。

$q=2$ のとき，$4p$ が 40 以下となる 2 以外の素数 p は　$p=3$，5，7

$q=3$ のとき，$9p$ が 40 以下となる 3 以外の素数 p は　$p=2$

(3) 40 以下の自然数のうち，正の約数が 6 個である数は，

(1) から　32

(2) から　12，20，28，18

これらを小さい順に並べると　12，18，20，28，32

答 (ア) 5　(イ) 2　(ウ) 2　(エ) 3　(オ) 5　(カ) 7　(キ) 2
(ク) 1　(ケ) 2　(コ) 1　(サ) 8　(シ) 2　(ス) 0　(セ) 2
(ソ) 8　(タ) 3　(チ) 2

8 (1) $667=299\cdot 2+69$
$299=69\cdot 4+23$
$69=23\cdot 3+0$

よって，667 と 299 の最大公約数は　23

(2) $517=187\cdot 2+143$
$187=143\cdot 1+44$
$143=44\cdot 3+11$
$44=11\cdot 4+0$

よって，517 と 187 の最大公約数は　11

(3) $923=377\cdot 2+169$
$377=169\cdot 2+39$
$169=39\cdot 4+13$
$39=13\cdot 3+0$

よって，923 と 377 の最大公約数は　13

9 (1) 23 と 16 に互除法の計算を行う。

$23=16\cdot 1+7$　移項すると　$7=23-16\cdot 1$
$16=7\cdot 2+2$　移項すると　$2=16-7\cdot 2$
$7=2\cdot 3+1$　移項すると　$1=7-2\cdot 3$

よって　$1=7-2\cdot 3$
$=7-(16-7\cdot 2)\cdot 3$
$=7\cdot 7+16\cdot(-3)$
$=(23-16\cdot 1)\cdot 7+16\cdot(-3)$
$=23\cdot 7+16\cdot(-10)$

すなわち　$23\cdot 7+16\cdot(-10)=1$

よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=7$，$y=-10$

(2) 34 と 29 に互除法の計算を行う。

$34=29\cdot 1+5$　移項すると　$5=34-29\cdot 1$
$29=5\cdot 5+4$　移項すると　$4=29-5\cdot 5$
$5=4\cdot 1+1$　移項すると　$1=5-4\cdot 1$

よって　$1=5-4\cdot 1$
$=5-(29-5\cdot 5)\cdot 1$
$=5\cdot 6-29\cdot 1$
$=(34-29\cdot 1)\cdot 6-29\cdot 1$
$=34\cdot 6-29\cdot 7$

すなわち　$34\cdot 6-29\cdot 7=1$

両辺に 4 を掛けると
$$34\cdot 24-29\cdot 28=4$$
よって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=24$，$y=28$

別解 (1) 23 と 16 に互除法の計算を行う。

$23=16\cdot 1+7$
$16=7\cdot 2+2$
$7=2\cdot 3+1$

$a=23$，$b=16$ とおく。

$7=23-16\cdot 1$ より　$7=a-b\cdot 1=a-b$
$2=16-7\cdot 2$ より　$2=b-(a-b)\cdot 2=-2a+3b$
$1=7-2\cdot 3$ より　$1=(a-b)-(-2a+3b)\cdot 3=7a-10b$

よって，$7a-10b=1$ より　$23\cdot 7+16\cdot(-10)=1$

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=7$，$y=-10$

(2) 34 と 29 に互除法の計算を行う。

$34=29\cdot 1+5$
$29=5\cdot 5+4$
$5=4\cdot 1+1$

$a=34$，$b=29$ とおく。

$5=34-29\cdot 1$ より　$5=a-b\cdot 1=a-b$
$4=29-5\cdot 5$ より　$4=b-(a-b)\cdot 5=-5a+6b$
$1=5-4\cdot 1$ より　$1=(a-b)-(-5a+6b)\cdot 1=6a-7b$

よって，$6a-7b=1$ より　$34\cdot 6-29\cdot 7=1$

両辺に 4 を掛けると　$34\cdot 24-29\cdot 28=4$

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは　$x=24$，$y=28$

10 (1)　$5x-2y=1$　……①

$x=1$，$y=2$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$5\cdot 1-2\cdot 2=1$　……②

①−② から　$5(x-1)-2(y-2)=0$　……③

5 と 2 は互いに素であるから，③ より
$$x-1=2k,\ y-2=5k\quad (k \text{ は整数})$$
したがって，① のすべての整数解は
$$x=2k+1,\ y=5k+2\quad (k \text{ は整数})$$
(2)　$36x+25y=2$　……①

$x=-9$，$y=13$ は，$36x+25y=1$ の整数解の 1 つである。

よって　$36\cdot(-9)+25\cdot 13=1$

両辺に 2 を掛けると　$36\cdot(-18)+25\cdot 26=2$　……②

①−② から　$36(x+18)+25(y-26)=0$　……③

36 と 25 は互いに素であるから，③ より
$$x+18=25k,\ y-26=-36k\quad (k \text{ は整数})$$
したがって，① のすべての整数解は
$$x=25k-18,\ y=-36k+26\quad (k \text{ は整数})$$

参考 1 (2) 36 と 25 に互除法を用いると

$36=25\cdot 1+11$　移項すると　$11=36-25\cdot 1$
$25=11\cdot 2+3$　移項すると　$3=25-11\cdot 2$
$11=3\cdot 3+2$　移項すると　$2=11-3\cdot 3$
$3=2\cdot 1+1$　移項すると　$1=3-2\cdot 1$

よって　$1=3-2\cdot 1=3-(11-3\cdot 3)\cdot 1=3\cdot 4+11\cdot(-1)$
$=(25-11\cdot 2)\cdot 4+11\cdot(-1)=25\cdot 4+11\cdot(-9)$
$=25\cdot 4+(36-25\cdot 1)\cdot(-9)=36\cdot(-9)+25\cdot 13$

したがって，$36x+25y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-9$，$y=13$

参考 2 (2) 36 と 25 に互除法の計算を行う。

$36=25\cdot 1+11$
$25=11\cdot 2+3$
$11=3\cdot 3+2$
$3=2\cdot 1+1$

$a=36$，$b=25$ とおく。

$11=36-25\cdot 1$ より　$11=a-b\cdot 1=a-b$
$3=25-11\cdot 2$ より　$3=b-(a-b)\cdot 2=-2a+3b$
$2=11-3\cdot 3$ より　$2=(a-b)-(-2a+3b)\cdot 3=7a-10b$
$1=3-2\cdot 1$ より　$1=(-2a+3b)-(7a-10b)\cdot 1=-9a+13b$

よって，$-9a+13b=1$ より　$36\cdot(-9)+25\cdot 13=1$

したがって，$36x+25y=1$ の整数解の 1 つは　$x=-9$，$y=13$

11 求める自然数を n とすると，n は整数 x，y を用いて，次のように表される。
$$n=3x+2,\ n=4y+3$$
よって　$3x+2=4y+3$

すなわち　$3x-4y=1$　……①

$x=-1$，$y=-1$ は ① の整数解の 1 つであるから

$3\cdot(-1)-4\cdot(-1)=1$　……②

①−② から　$3(x+1)-4(y+1)=0$　……③

3 と 4 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は
$$x+1=4k\quad \text{すなわち}\quad x=4k-1\quad (k \text{ は整数})$$
と表される。

したがって　$n=3x+2=3(4k-1)+2=12k-1$

$12k-1$ が 3 桁で最大の自然数となるのは，$k=83$ のときで

$n=12\cdot 83-1=995$　　答 995

12 (1) 求める整数を n とすると，(A)，(B) から，n は整数 x，y を用いて次のように表される。

$n=3x+2$，$n=5y+3$

よって　$3x+2=5y+3$

すなわち　$3x-5y=1$　…… ①

$x=2$，$y=1$ は ① の整数解の 1 つであるから

$3\cdot2-5\cdot1=1$　…… ②

①−② から　$3(x-2)-5(y-1)=0$　…… ③

3 と 5 は互いに素であるから，③ を満たす整数 x は

$x-2=5k$　すなわち　$x=5k+2$　(k は整数)

と表される。

したがって　$n=3x+2=3(5k+2)+2=15k+8$

$15k+8$ が正で最小となるのは，$k=0$ のときで　$n=8$

$15k+8$ が負で最大となるのは，$k=-1$ のときで　$n=-7$

(2) 求める整数を n とすると，(C) から，n は整数 z を用いて　$n=7z+4$ と表される。

また，(1) より，(A)，(B) を同時に満たす整数 n は整数 k を用いて $n=15k+8$ と表されるから

$7z+4=15k+8$

すなわち　$7z-15k=4$　…… ④

$z=7$，$k=3$ は ④ の整数解の 1 つであるから

$7\cdot7-15\cdot3=4$　…… ⑤

④−⑤ から　$7(z-7)-15(k-3)=0$　…… ⑥

7 と 15 は互いに素であるから，⑥ を満たす整数 z は

$z-7=15l$　すなわち　$z=15l+7$　(l は整数)

と表される。

これを $n=7z+4$ に代入すると

$n=7(15l+7)+4=105l+53$

$105l+53$ が正で最小となるのは，$l=0$ のときで　$n=53$

$105l+53$ が負で最大となるのは，$l=-1$ のときで　$n=-52$

答 (ア) 8　(イ) 7　(ウ) 5　(エ) 3　(オ) 5　(カ) 2

13 分数 $\frac{13}{7}$ を小数で表すと　$\frac{13}{7}=1.\dot{8}5714\dot{2}$

小数点以下で，857142 の 6 個の数字の並びが繰り返される。

$50=6\cdot8+2$

であるから，小数第 50 位の数字は 857142 の 2 番目の数字で 5 である。

14 (1) $101010_{(2)}=1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0=42$

(2) $2201_{(3)}=2\cdot3^3+2\cdot3^2+0\cdot3^1+1\cdot3^0=73$

(3) $127_{(8)}=1\cdot8^2+2\cdot8^1+7\cdot8^0=87$

15 (1) 98 を 2 で割り，商を 2 で割る割り算を繰り返すと右のようになる。

出てきた余りを逆に並べて　$1100010_{(2)}$

2) 98　余り
2) 49 … 0
2) 24 … 1
2) 12 … 0
2) 6 … 0
2) 3 … 0
2) 1 … 1
0 … 1

(2) 2 進数 $111010_{(2)}$ を 10 進法で表すと

$111010_{(2)}=1\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0=58$

58 を 3 で割り，商を 3 で割る割り算を繰り返すと右のようになる。

出てきた余りを逆に並べて　$2011_{(3)}$

3) 58　余り
3) 19 … 1
3) 6 … 1
3) 2 … 0
0 … 2

16 整数 a，b をそれぞれ 10 進法で表すと

$a=1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0=11$

$b=2\cdot3^2+1\cdot3^1+1\cdot3^0=22$

よって　$a+b=11+22=33$

33 を 5 で割り，商を 5 で割る割り算を繰り返すと右のようになる。

出てきた余りを逆に並べて　$113_{(5)}$

5) 33　余り
5) 6 … 3
5) 1 … 1
0 … 1

答 (ア) 1　(イ) 1　(ウ) 3

数学 I ★★ 2次関数 ★★　章末問題A

1 放物線 $y=-2x^2+3x+1$ を平行移動した放物線の方程式は $y=-2x^2+bx+c$ の形で表される。

点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 12)$ を通るから

$0=-2\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c$，　$12=-2\cdot1^2+b\cdot1+c$

よって　$-2b+c=8$，　$b+c=14$

これを解くと　$b=2$，$c=12$

よって，求める放物線の方程式は　$y=-2x^2+2x+12$

2 $2x^2+4x=2(x+1)^2-2$ より，放物線 $y=2x^2+4x$ の頂点の座標は　$(-1,\ -2)$

$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$ より，放物線 $y=x^2+ax+b$ の頂点の座標は

$\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$

よって　$-\frac{a}{2}=-1$，$-\frac{a^2}{4}+b=-2$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$

別解 $y=2x^2+4x$ を変形すると　$y=2(x+1)^2-2$

x^2 の係数が 1 で頂点の座標が $(-1,\ -2)$ である放物線の方程式は

$y=(x+1)^2-2$　すなわち　$y=x^2+2x-1$

よって，係数を比較して　$a=2$，$b=-1$

3 (1) $x^2-mx+m=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m$

よって，2 次関数 $y=x^2-mx+m$ は，$x=\frac{m}{2}$ で最小値 $-\frac{m^2}{4}+m$ をとる。

したがって　$k=-\frac{m^2}{4}+m$

(2) $-\frac{m^2}{4}+m=-\frac{1}{4}(m-2)^2+1$

よって，$k=-\frac{m^2}{4}+m$ は，$m=2$ で最大値 1 をとる。

4 (1) 放物線が上に凸であるから　$a<0$

よって，符号は　負

(2) 放物線と y 軸の交点の y 座標が正であるから　$c>0$

よって，符号は　正

(3) 放物線の軸は直線 $x=-\frac{b}{2a}$ で，y 軸の右側にあるから　$-\frac{b}{2a}>0$

よって，符号は　正

(4) $a<0$ かつ $-\frac{b}{2a}>0$ より　$b>0$　　よって，符号は　正

(5) 放物線と x 軸は異なる 2 点を共有しているから　$b^2-4ac>0$

よって，符号は　正

(6) グラフ上の点で，x 座標が 1 である点の y 座標が $a+b+c$ である。

この点は x 軸の上側にあるから　$a+b+c>0$

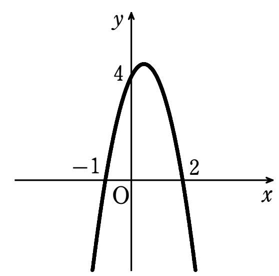
よって，符号は　正

5 2 次不等式 $ax^2+bx+4>0$ の解が $-1<x<2$ であるのは，2 次関数 $y=ax^2+bx+4$ のグラフが上に凸で，x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるときである。

$y=ax^2+bx+4$ において

$x=-1$ とすると　$y=a-b+4$

$x=2$ とすると　$y=4a+2b+4$



よって

$a<0$　…… ①

$a-b+4=0$　…… ②

$4a+2b+4=0$　…… ③

②，③ を解くと　$a=-2$，$b=2$

これは ① を満たす。

したがって　$a=-2$，$b=2$

6 $x^2-ax-2a^2=(x+a)(x-2a)$ より，放物線 $y=x^2-ax-2a^2$ は，x 軸と 2 点 $(-a,\ 0)$，$(2a,\ 0)$ で交わる。

(1) $a>0$ のとき　$-a<2a$

このとき，2 次不等式の解は

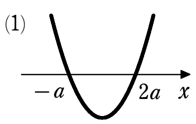
$-a<x<2a$

(2) $a<0$ のとき　$2a<-a$

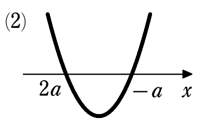
このとき，2 次不等式の解は

$2a<x<-a$

(1)



(2)



7 2次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2=0$，$x^2+2ax+2a=0$ の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=(a+1)^2-4\cdot1\cdot a^2=-3a^2+2a+1$$
$$D_2=(2a)^2-4\cdot1\cdot2a=4(a^2-2a)$$

ともに実数解をもつのは，$D_1\geqq0$ かつ $D_2\geqq0$ のときである。

$D_1\geqq0$ から　　$-3a^2+2a+1\geqq0$

よって　　$3a^2-2a-1\leqq0$

すなわち　　$(a-1)(3a+1)\leqq0$

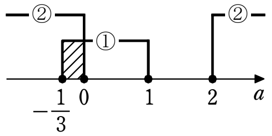
これを解くと　$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq1$　……①

$D_2\geqq0$ から　　$a^2-2a\geqq0$

すなわち　　$a(a-2)\geqq0$

これを解くと　$a\leqq0$，$2\leqq a$　……②

①，② の共通範囲を求めて



$$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq0$$

8 2次方程式 $x^2-2ax+a=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-2a)^2-4\cdot1\cdot a=4(a^2-a)$$

2次関数の x^2 の係数が正であるから，y の値が常に正であるのは $D<0$ のときである。

$a^2-a<0$ から　　$a(a-1)<0$

これを解いて　　$0<a<1$

別解　$x^2-2ax+a=(x-a)^2-a^2+a$ より，2次関数 $y=x^2-2ax+a$ は，$x=a$ で最小値 $-a^2+a$ をとる。

y の値が常に正であるのは $-a^2+a>0$ のときである。

不等式の両辺に -1 を掛けて　$a^2-a<0$　すなわち　$a(a-1)<0$

これを解いて　　$0<a<1$

数学Ⅰ ★★ 図形と計量（三角比） ★★　章末問題A

1 (1)　$\mathrm{BH}=x$ (m) とすると

$$\mathrm{PH}=x\tan60^\circ=\sqrt{3}x,\quad \mathrm{PH}=(x+10)\tan45^\circ=x+10$$

であるから　$\sqrt{3}x=x+10$

よって　$(\sqrt{3}-1)x=10$

$$x=\frac{10}{\sqrt{3}-1}=\frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{10(\sqrt{3}+1)}{2}=5(\sqrt{3}+1)\qquad 答\ 5(\sqrt{3}+1)\ \mathrm{m}$$

(2)　$\mathrm{PH}=x+10=5(\sqrt{3}+1)+10=5(\sqrt{3}+3)$　　答 $5(\sqrt{3}+3)$ m

2 (1)　辺 AB は円の直径であるから　　$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

直角三角形 ABC において　$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\sin60^\circ=10\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

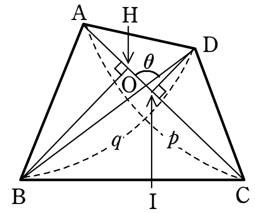
(2)　　$\angle\mathrm{CAB}=180^\circ-(90^\circ+60^\circ)=30^\circ$

よって　　$\angle\mathrm{DAC}=75^\circ-30^\circ=45^\circ$

△ACD に正弦定理を用いると　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin45^\circ}=2\times5$

したがって　　$\mathrm{CD}=10\sin45^\circ=10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

3 点 B，D から直線 AC にそれぞれ垂線を下ろし，AC との交点をそれぞれ H，I とおく。



$$\mathrm{BH}=\mathrm{OB}\sin(180^\circ-\theta)=\mathrm{OB}\sin\theta$$
$$\mathrm{DI}=\mathrm{OD}\sin(180^\circ-\theta)=\mathrm{OD}\sin\theta$$

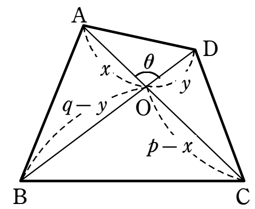
であるから

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$$
$$\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DI}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{OD}\sin\theta$$

よって

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{OD}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{AC}(\mathrm{OB}+\mathrm{OD})\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

別解　$\mathrm{AO}=x$，$\mathrm{DO}=y$ とおくと，$\mathrm{BO}=q-y$，$\mathrm{CO}=p-x$ となる。



よって　$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}x(q-y)\sin(180^\circ-\theta)$

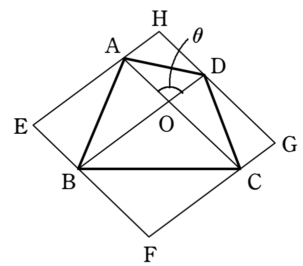
$$=\frac{1}{2}x(q-y)\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}(q-y)(p-x)\sin\theta$$
$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}(p-x)y\sin(180^\circ-\theta)=\frac{1}{2}(p-x)y\sin\theta$$
$$\triangle\mathrm{ODA}=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$

したがって

$$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCD}+\triangle\mathrm{ODA}$$
$$=\frac{1}{2}\{x(q-y)+(q-y)(p-x)+(p-x)y+xy\}\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

別解　右の図のように，各頂点を通り，対角線に平行な直線を引き，平行四辺形 EFGH を作ると

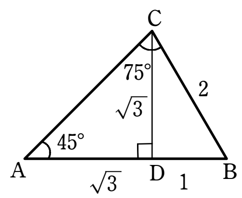


$$\angle\mathrm{EFG}=\angle\mathrm{GHE}=\theta$$

四角形 ABCD の面積 S は，平行四辺形 EFGH の面積 $pq\sin\theta$ の半分であるから

$$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

4 (1)　頂点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろすと



$$\angle\mathrm{ACD}=180^\circ-(45^\circ+90^\circ)=45^\circ$$
$$\angle\mathrm{BCD}=75^\circ-\angle\mathrm{ACD}=75^\circ-45^\circ=30^\circ$$

よって　$\mathrm{DB}=2\sin30^\circ=1$

$\mathrm{DC}=2\cos30^\circ=\sqrt{3}$

$\mathrm{AD}=\mathrm{DC}=\sqrt{3}$

したがって　　$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=\sqrt{3}+1$

(2)　△ABC に正弦定理を使うと

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sin75^\circ}=\frac{2}{\sin45^\circ}$$

よって　$\sin75^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\mathrm{AC}=\sqrt{6}$ であるから，△ABC に余弦定理を使うと

$$\cos75^\circ=\frac{2^2+(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}+1)^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{6}}=\frac{6-2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

数学A ★★ 場合の数と確率 ★★　章末問題A

1 百の位の数字が 1 であるとき，十，一の位には，残り 5 個の数字から 2 個取って並べるから，その並べ方は ${}_5\mathrm{P}_2$ 通りある。

よって，百の位の数字が 1 である 3 桁の整数は ${}_5\mathrm{P}_2$ 個ある。

${}_5\mathrm{P}_2=5\cdot4=20$ であるから，20 番目の数までは百の位の数字が 1 である。

同様に，百の位の数字が 2 である 3 桁の整数は 20 個あるから，40 番目の数までは百の位の数字が 2 である。

百の位の数字が 3 で，十の位の数字が 0 である整数は 4 個ある。

百の位の数字が 3 で，十の位の数字が 1 のとき，順に 310，312 と続くから，46 番目の数は　　312

2 (1)　大人 1 人の位置を基準にして考えると，もう 1 人の大人の位置はその向かい合う席に決まる。

残りの席に子ども 4 人が座ればよいから，求める並び方は

$$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24\ (通り)$$

(2)　大人 1 人の位置を基準にして考えると，もう 1 人の大人の位置は 2 通りある。

残りの席に子ども 4 人が座ればよいから，求める並び方は

$$2\times4!=2\times4\cdot3\cdot2\cdot1=48\ (通り)$$

3 (1)　0 から 9 までの 10 個の数字から 2 個を選ぶ組合せは ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りある。

同じ数字を 2 個ずつ含む 4 個の数字を 1 列に並べる順列は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通りある。

よって，条件を満たす番号の総数は

$${}_{10}\mathrm{C}_2\times\frac{4!}{2!2!}=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=270\ (個)$$

(2)　異なる 4 個の数字を 1 組決めると適する数字の並びが 1 個作れる。

よって，条件を満たす番号の総数は

$${}_{10}\mathrm{C}_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210\ (個)$$

4 (1)　8 人を 1 列に並べる順列は 8! 通りある。

男子と女子が交互に並ぶのは，男女男女男女男女　または　女男女男女男女男　の場合で，いずれも並び方は 4!×4! 通りある。

よって，求める確率は　　$\dfrac{4!\times4!\times2}{8!}=\dfrac{1}{35}$

(2)　両端の女子 2 人の並び方は ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り，両端以外の 6 人の並び方は 6! 通りある。

よって，求める確率は　　$\dfrac{{}_4\mathrm{P}_2\times6!}{8!}=\dfrac{3}{14}$

$\boxed{5}$ (1)　A の袋の中の白玉の個数が増えるのは，A から黒玉を取り出し，B からは白玉を取り出す場合である。

A の袋から黒玉を取り出し B の袋に入れたとき，B の袋には白玉 2 個と黒玉 5 個が入っている。

よって，求める確率は　$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{4}{35}$

(2)　A の袋の中の白玉の個数が変わっていない場合は，次の 2 つの場合である。

[1]　A の袋から白玉を取り出し，B の袋からも白玉を取り出す場合。

A の袋から白玉を取り出し B の袋に入れたとき，B の袋には白玉 3 個と黒玉 4 個が入っている。

よって，この場合の確率は　$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{7}$

[2]　A の袋から黒玉を取り出し，B の袋からも黒玉を取り出す場合。

[1] と同様に考えて，この場合の確率は　$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{7}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{19}{35}$$

別解　(2)　A の袋の中の白玉の個数が減るのは，A から白玉を取り出し，B からは黒玉を取り出す場合であるから，その確率は　$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{12}{35}$

よって，白玉の個数が変わらない確率は，(1) より　$1-\left(\dfrac{4}{35}+\dfrac{12}{35}\right)=\dfrac{19}{35}$

$\boxed{6}$ 3 人の手の出し方は　$3\times3\times3=27$（通り）

(1)　勝つ 1 人の選び方は 3 通りで，そのときの手の出し方が 3 通りあるから，求める確率は　$\dfrac{3\times3}{27}=\dfrac{1}{3}$

(2)　(1) と同様に，負ける 1 人の選び方は 3 通りで，そのときの手の出し方は 3 通りあるから，求める確率は　$\dfrac{3\times3}{27}=\dfrac{1}{3}$

(3)　[1]　1 回目，2 回目とも，3 人が残る場合

あいこになる確率は，全員が違う手の出し方が $3!=6$（通り）あり，全員が同じ手の出し方が 3 通りあるから　$\dfrac{6+3}{27}=\dfrac{1}{3}$

よって　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$

[2]　1 回目は 3 人が残り，2 回目に 2 人が残る場合

2 人のうち 1 人が勝つ確率は　$\dfrac{2\times3}{3\times3}=\dfrac{2}{3}$

よって　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{27}$

[3]　1 回目に 2 人が残り，2 回目はあいこの場合

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$

以上から，求める確率は　$\dfrac{1}{27}+\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{5}{27}$